

Список вопросов для подготовки к экзамену по курсу ”Общая алгебра и аналитическая геометрия“

для студентов первого курса АВТФ и РЭФ НГТУ (группы
АО-21, АИ-22, АТ-23, РП4-21, РП4-22, РП4-23, РЭЗ-21,
РЭЗ-22)

1. Множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера — Венна. Основные тождества на множествах.
2. Кванторы.
3. Числовые множества. Операции над числами.
4. Натуральные, целые, рациональные, действительные числа.
5. Комплексные числа.
 - 1) Алгебраическая форма записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.
 - 2) Формы записи комплексных чисел. Формула Эйлера.
 - 3) Умножение и деление чисел, записанных в тригонометрической и показательной форме.
 - 4) Возведение в степень комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексных чисел.
6. Поля. Определения и примеры.
7. Многочлены.
 - 1) Определение многочлена. Степень многочлена. Равенство многочленов.
 - 2) Деление многочленов с остатком.
 - 3) Корни многочленов. Кратность корней.
 - 4) Основная теорема алгебры.
 - 5) Приводимые и неприводимые многочлены.
 - 6) Теорема Безу (с доказательством). Следствие из теоремы Безу.
 - 7) Теоремы о разложении многочлена на неприводимые множители над полем \mathbb{C} и над полем \mathbb{R} (с доказательствами).
8. Матрицы.
 - 1) Определение матрицы. Размерность матрицы. Виды матриц. Равенство матриц.
 - 2) Операции над матрицами. Свойства операций.
 - 3) Определитель матрицы. Вычисление определителей матриц малых порядков.
 - 4) Свойства определителей (с доказательством). Способы вычисления определителей. Теорема об определителе произведения квадратных матриц.
 - 5) Обратная матрица. Теорема о существовании обратной матрицы.
 - 6) Способы нахождения обратной матрицы. Алгоритм нахождения обратной матрицы при помощи элементарных преобразований (с обоснованием).
 - 7) Ранг матрицы. Определение.

- 8) Способы нахождения ранга матрицы. Элементарные преобразования. Теорема об элементарных преобразованиях. Теорема о связи ранга и кол-ве ненулевых строк (с доказательством).
 - 9) Ступенчатая матрица. Определение. Алгоритм приведения матрицы к ступенчатой при помощи элементарных преобразований.
9. Системы линейных уравнений (СЛУ).
- 1) Определения. Решение СЛУ. Эквивалентные СЛУ. Совместные и определенные СЛУ.
 - 2) Метод Крамера. Границы применимости.
 - 3) Метод обратной матрицы решения СЛУ. Решение матричных уравнений. Границы применимости. Обоснование метода.
 - 4) Элементарные преобразования СЛУ. Теорема об эквивалентности СЛУ, при элементарных преобразованиях (с доказательством).
 - 5) Метод Гаусса.
 - 6) Исследования СЛУ на совместность и определенность. Теорема Кронекера — Капелли. Теорема-критерий определенности системы (с доказательством).
10. Геометрические векторы.
- 1) Определение геометрического вектора. Длина вектора. Коллинеарные и компланарные векторы. Сонаправленные и противоположно направленные векторы.
 - 2) Операции над векторами. Свойства операций.
 - 3) Теорема–условие коллинеарности векторов (с доказательством).
 - 4) Проекция вектора на прямую.
 - 5) Линейная комбинация геометрических векторов. Линейная зависимость геометрических векторов. Сопутствующие определения. Теорема о связи линейной зависимости и представления одного из векторов в виде линейной комбинации остальных (с доказательством).
 - 6) Базис пространства геометрических векторов. Теорема о базисе. Размерность. Теоремы о размерностях пространств V_2 (с доказательством) и V_3 .
 - 7) Прямоугольный декартов базис. Определения. Выражение длины вектора через декартовы координаты. Направляющие косинусы векторы. Тождество для направляющих косинусов.
 - 8) Основные задачи на пространствах геометрических векторов.
11. Произведения векторов.
- 1) Скалярное произведение векторов. Его свойства (с доказательствами). Геометрический смысл.
 - 2) Скалярное произведение векторов в координатной форме (с доказательством).
 - 3) Векторное произведение векторов. Его свойства (большинство из них с доказательствами). Геометрический смысл.
 - 4) Векторное произведение векторов в координатной форме (с доказательством).

- 5) Смешанное произведение векторов. Его свойства (с доказательством). Геометрический смысл.
 - 6) Смешанное произведение векторов в координатной форме (с доказательством).
12. Метод координат на плоскости и в пространстве.
- 1) Прямоугольная декартова и полярная системы координат.
 - 2) Уравнения линии на плоскости в прямоугольной декартовой и полярной системе координат. Параметрическое уравнение линии.
 - 3) Уравнения прямой на плоскости (все изученные варианты). Теорема об общем уравнении прямой (с доказательством). Лемма о различных уравнениях одной плоскости (с доказательством).
 - 4) Расстояние от точки до прямой на плоскости (с доказательством).
 - 5) Взаимное расположение прямых на плоскости. Угол между прямыми на плоскости.
 - 6) Уравнение поверхности в пространстве.
 - 7) Уравнение линии в пространстве. Параметрическое уравнение линии.
 - 8) Уравнения плоскости в пространстве (все изученные варианты). Теорема об общем уравнении плоскости. Лемма о различных уравнениях одной плоскости.
 - 9) Расстояние от точки до плоскости (с доказательством).
 - 10) Уравнения прямой в пространстве (все изученные варианты).
 - 11) Расстояние от точки до прямой в пространстве.
 - 12) Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Углы между прямыми и плоскостями в пространстве.
 - 13) Основные задачи аналитической геометрии.
13. Кривые и поверхности второго порядка.
- 1) Определение кривой второго порядка. Виды кривых второго порядка.
 - 2) Эллипс. Каноническое уравнение. Связанная с эллипсом терминология.
 - 3) Фокальное свойство эллипса (с доказательством).
 - 4) Свойство расстояний до фокуса и до директрисы эллипса (с доказательством).
 - 5) Гипербола. Каноническое уравнение. Связанная с гиперболой терминология.
 - 6) Фокальное свойство гиперболы (с доказательством).
 - 7) Свойство расстояний до фокуса и до директрисы гиперболы (с доказательством).
 - 8) Парабола. Каноническое уравнение. Связанная с Параболой терминология.
 - 9) Свойство расстояний до фокуса и до директрисы параболы (с доказательством).
 - 10) Поверхности второго порядка. Определение.
 - 11) Конические сечения.
 - 12) Поверхности вращения.
14. Абстрактные линейные векторные пространства.
- 1) Определение абстрактного линейного векторного пространства. Примеры. Пространство \mathbb{R}^n .

- 2) Базис линейного векторного пространства. Размерность. Координаты вектора в фиксированном базисе.
 - 3) Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость векторов.
 - 4) Подпространство (теорема о том что подпространство является пространством с доказательством).
 - 5) Линейная оболочка. Теорема о размерности линейной оболочки подпространства, порожденного строками матрицы. (с доказательством).
 - 6) Изменение координат вектора при смене базиса (с выводом). Матрица перехода.
 - 7) Теорема об определителе матрицы перехода (с доказательством).
15. Однородные СЛУ. Определение. Пространство решений однородной СЛУ (теорема с доказательством). Фундаментальная система решений.
16. Связь решений неоднородных и соответствующих однородных СЛУ. Векторная запись множества решений СЛУ.
17. Линейные операторы и отображения.
- 1) Основные определения.
 - 2) Образ вектора под действием линейного оператора. Полный прообраз вектора под действием линейного оператора.
 - 3) Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе линейного оператора (с доказательством).
 - 4) Матрица линейного отображения (с выводом).
 - 5) Преобразование матрицы линейного оператора при смене базиса (с выводом).
 - 6) Подобные матрицы.
 - 7) Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования. Алгоритм нахождения собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.
 - 8) Собственное подпространство.
 - 9) Теорема о линейной независимости собственных векторов для различных собственных значений (с доказательством).
 - 10) Вид матрицы линейного оператора в базисе, состоящем из собственных векторов
18. Евклидовы пространства.
- 1) Скалярное произведение. Определение евклидова пространства.
 - 2) Неравенство Коши — Буняковского (с доказательством).
 - 3) Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогональные и ортонормированные базисы.
 - 4) Теорема о линейной независимости ортонормированной системы векторов (с доказательством).
 - 5) Сопряженные операторы. Связь между матрицами сопряженных операторов.
 - 6) Самосопряженные операторы. Свойства самосопряженных операторов.
 - 7) Ортогональный оператор. Матрица ортогонального оператора.
 - 8) Свойства матрицы перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному.

19. Квадратичные формы.

- 1) Определение квадратичной формы. Пространственная точка зрения на задание квадратичной формы.
- 2) Матрица квадратичной формы. Ее смысл.
- 3) Преобразование матрицы квадратичной формы при смене базиса (с выводом).
- 4) Приведение квадратичной формы к главным осям. Канонический вид квадратичной формы.
- 5) Положительно определенные квадратичные формы. Теорема о каноническом виде положительно определенной квадратичной формы.

Список литературы

- [1] *Ивлева, А. М., Прилуцкая, П. И., Черных И. Д.*, Линейная алгебра, аналитическая геометрия, Новосибирск, изд-во НГТУ, 2009.
- [2] *Ивлева, А. М., Ковалевская Л. В.* Готовимся к контрольной работе, Новосибирск, изд-во НГТУ, 2009.
- [3] *Ивлева, А. М., Пинус, А. Г., Чехонадских А. В.*, Основы алгебры и аналитической геометрии, Новосибирск, изд-во НГТУ, 2003.