10 декабря 2013 г.

IV Олимпиада НГТУ по линейной алгебре и аналитической геометрии

Решения

1. Пусть a и b — два неравных комплексных числа. На комплексной плоскости найти все точки, изображающие комплексные числа z, удовлетворяющие условию: существует φ, такое что $\dfrac{z-a}{z-b} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (значение φ может быть различным для различных z).

(Пинус А. Г.)

Решение. Имеем $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$, то есть $|z-a| = |z-b|$. Это значит, что расстояния от точек a и b до точки z должны быть равны. Следовательно, все точки, удовлетворяющие данному равенству, лежат на прямой, проходящей через середину отрезка, соединяющего a и b и перепендикулярной к этому отрезку. Обратно, пусть точка z лежит на прямой, тогда запишем $z-a = r_1(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1)$ и $z-b = r_2(\cos\psi_2 + i\sin\psi_2)$. Так как эти два числа имеют одинаковый модуль, получаем $r_1 = r_2$, следовательно $\dfrac{z-a}{z-b} = \cos(\psi_1-\psi_2) + i\sin(\psi_1-\psi_2)$, то есть $\varphi = \psi_1 - \psi_2$, что и требовалось доказать. $\square$

2. Имеется система уравнений

$$\begin{cases} * \; x + * \; y + * \; z = 0 \\ * \; x + * \; y + * \; z = 0 \\ * \; x + * \; y + * \; z = 0 \end{cases}$$

Два человека поочерёдно вписывают вместо звёздочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое целочисленное решение.

(Афанасьева С. Г.)

Доказательство. Начинающий первым ходом записывает произвольный коэффициент при z в первом уравнении. Затем на ход второго он отвечает следующим образом. Если второй записывает какой-то коэффициент при x или y, то первый записывает в том же самом уравнении при y или при x такой же коэффициент. Если же второй записывает какой-то коэффициент при z, то первый записывает произвольный коэффициент при z в оставшемся уравнении. Полученная система имеет решение $(1,-1,0)$. $\square$

3. Матрица называется целочисленной, если ее элементы — целые числа. Дополнить строку $(6, 10, 15)$ до обратимой целочисленной матрицы, либо доказать, что это сделать невозможно.

(Тимошенко Е. И.)

Решение. Рассмотрим цепочку преобразований столбцов матрицы, которые не меняют ее определителя

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

4. Найти координаты вершин $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ треугольника, если координаты вершины $\boldsymbol{A} = (-1; 3)$; уравнение биссектрисы, проведенной из вершины $\boldsymbol{B}$, $4x - y - 10 = 0$; уравнение медианы, проведенной из вершины $\boldsymbol{C}$, $10x + 6y - 59 = 0$.

(Чехонадских А. В.)

Решение. Пусть $\boldsymbol{M}$ — середина стороны $\boldsymbol{AB}$. Тогда

$$\boldsymbol{M} = \left(\frac{x_{\boldsymbol{A}} + x_{\boldsymbol{B}}}{2}, \frac{y_{\boldsymbol{A}} + y_{\boldsymbol{B}}}{2}\right) = \left(\frac{-1 + x_{\boldsymbol{B}}}{2}, \frac{3 + y_{\boldsymbol{B}}}{2}\right).$$

Так как эта точка лежит на прямой $10x + 6y - 59 = 0$, получаем

$$10\frac{-1 + x_{\boldsymbol{B}}}{2} + 6\frac{3 + y_{\boldsymbol{B}}}{2} - 59 = 0.$$

Следовательно, $5x_{\boldsymbol{B}} + 3y_{\boldsymbol{B}} = 55$. Так как точка $\boldsymbol{B}$ лежит на прямой $4x - y - 10 = 0$ получаем $4x_{\boldsymbol{B}} - y_{\boldsymbol{B}} = 10$. Решая систему из двух полученных уравнений, находим $\boldsymbol{B}(5, 10)$.

Угловой коэффициент прямой $\boldsymbol{BA}$ равен $k_1 = \dfrac{y_{\boldsymbol{B}} - y_{\boldsymbol{A}}}{x_{\boldsymbol{B}} - x_{\boldsymbol{A}}} = \dfrac{10 - 3}{5 + 1} = \dfrac{7}{6}$. Перепишем уравнение биссектрисы как $y = 4x - 10$, отсюда, угловой коэффициент биссектрисы равен $k_2 = 4$. Тангенс угла между этими прямыми равен $\left|\dfrac{\frac{7}{6} - 4}{1 + 4 \cdot \frac{7}{6}}\right| = \dfrac{1}{2}$. Для углового коэффициента k_3 прямой $\boldsymbol{BC}$ имеем $\dfrac{k_3 - 4}{1 + 4k_3} = \dfrac{1}{2}$, так как прямая $4x - y = 10 = 0$ — биссектриса. Решая это уравнение, получаем $k_3 = \dfrac{7}{6}$ или $k_3 = -\dfrac{9}{2}$. Первый вариант невозможен, так как это — угловой коэффициент прямой $\boldsymbol{BA}$. Имеем $y - y_{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{9}{2}(x - x_{\boldsymbol{B}})$, или $y - 10 = -\dfrac{9}{2}(x - 5)$, то есть $9x + 2y - 65 = 0$. Так как точка $\boldsymbol{C}$ лежит как на прямой $\boldsymbol{BC}$, так и на медиане, проведенной из нее, получаем систему

$$\begin{cases} 9x_{\boldsymbol{C}} + 2y_{\boldsymbol{C}} = 65 \\ 10x_{\boldsymbol{C}} + 6y_{\boldsymbol{C}} = 59, \end{cases}$$

решая которую, получаем $\boldsymbol{C}\left(8, -\dfrac{7}{2}\right)$.

Ответ: $\boldsymbol{B}(5, 10)$, $\boldsymbol{C}\left(8, -\frac{7}{2}\right)$ □

5. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} 583133222 & 798487922 & 355326733 & 481697922 \\ 368492522 & 613958311 & 584391244 & 969837411 \\ 724629344 & 563126800 & 904531633 & 732865322 \\ 593271100 & 389453311 & 793215400 & 635792944 \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

(Овчинникова Е. В., Судоплатов С. В.)

Решение. Возьмем остатки при делении на 10 для каждого элемента определителя. Получим определитель четвёртого порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Непосредственно вычисляется, что этот определитель равен $46 \neq 0$. Следовательно, исходный определитель также не равен нулю, так как дает тот же остаток при делении на 10, что и определитель из остатков. $\square$

6. Дана матрица $\begin{pmatrix} 2013 & 2014 \\ 2013 & 2015 \end{pmatrix}$. Разрешается любую строку (столбец) поэлементно умножить или разделить на другую строку (соответственно, столбец). Можно ли за несколько таких операций получить матрицу $\begin{pmatrix} 2013 & 2015 \\ 2013 & 2014 \end{pmatrix}$?

(Попков Р. А.)

Решение. Представим все числа в матрице как степени, например, числа 2013. Тогда указанные операции сводятся к сложению и вычитанию соответствующих показателей. Матрицы из показателей имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & \log_{2013} 2014 \\ 1 & \log_{2013} 2015 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & \log_{2013} 2015 \\ 1 & \log_{2013} 2014 \end{pmatrix}$ соответственно. Определители их не равны 0 и противоположны. Следовательно, нельзя. $\square$