11 декабря 2012 г.

III Олимпиада НГТУ по линейной алгебре и аналитической геометрии

Решения

1. Пусть z и w — комплексные числа. Доказать, что $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2|z|^2+2|w|^2$.

(Афанасьева С. Г.)

Доказательство. Пусть $z = a+bi$, $w = c+di$. Тогда $|z+w|^2 = (a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2$ и $|z-w|^2 = (a-c)^2+(b-d)^2 = a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2$. Поэтому $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2(a^2+c^2+b^2+d^2) = 2|z|^2+2|w|^2$. □

2. Баба-Яга и Кощей Бессмертный играют в такую игру: по очереди ставят произвольные действительные числа в матрицу 12×12. Баба-Яга хочет сделать определитель получившейся в конце матрицы отличным от нуля, а Кощей Бессмертный хочет помешать ей в этом. Баба-Яга настояла на том, что будет ходить первой. Может ли теперь кто-нибудь из них гарантированно победить?

(Попков Р. А.)

Решение. Победит Кощей. Разобъём строчки матрицы на пары $(1,2),(3,4),\ldots,(11,12)$. Тогда после каждого хода Яги Кощею достаточно ставить то же самое число в тот же столбец в строчку, являющуюся парой для той, в которую поставила число Яга. В полученной матрице заведомо найдутся две равные строки (а точнее, 6 пар равных строк), следовательно, ее определитель равен 0. □

3. Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка. Доказать, что если $AB-E$ вырожденная матрица, то и $BA-E$ вырожденная.

(Тимошенко Е. И.)

Решение. Пусть $|AB-E| = 0$. Докажем, что $|BA-E| = 0$.

Если $|AB-E| = 0$, то однородная система с матрицей $AB-E$ имеет ненулевое решение X_0, то есть $(AB-E)X_0 = \mathbb{O}$, $X_0 \neq \mathbb{O}$ (здесь $\mathbb{O}$ — это вектор-столбец, все элементы которого нулевые). Отсюда

$$ABX_0 - X_0 = \mathbb{O}. \qquad (1)$$

Обозначим BX_0 через Y_0. Тогда $BX_0 \neq \mathbb{O}$, так как в противном случае $ABX_0 = 0$, а значит из (1) следует, что $X_0 = \mathbb{O}$, что неверно по предположению. Умножим (1) слева на B. Получим $BABX_0 - BX_0 = \mathbb{O}$, то есть $BAY_0 - Y_0 = \mathbb{O}$. Отсюда получаем $(BA-E)Y_0 = \mathbb{O}$. Так как $Y_0 \neq \mathbb{O}$, получаем $|BA-E| = 0$. Аналогично можно доказать, что если $|BA-E| = 0$, то $|AB-E| = 0$. □

4. Целочисленной решеткой называется множество точек на плоскости, все координаты которых являются целыми числами. Доказать, что если вершины какого-нибудь невырожденного параллелограмма совпадают с узлами целочисленной решетки и внутри параллелограмма или на его границе имеются другие узлы решетки, то площадь такого параллелограмма больше 1.

(Судоплатов С. В.)

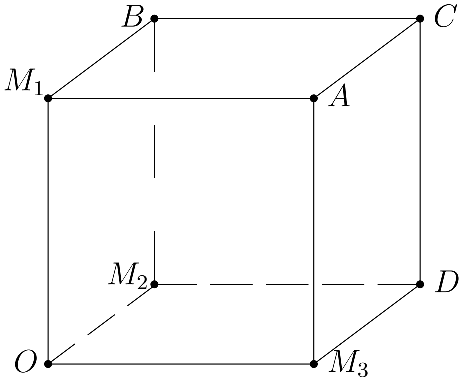
Доказательство. Поскольку параллелограмм $\boldsymbol{ABCD}$ невырожден, его вершины $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ не лежат на одной прямой, а площадь S представляется в виде модуля векторного произведения $\overline{\boldsymbol{AB}}\times\overline{\boldsymbol{AC}}$. Так как координаты векторов целочисленные, а координаты $(0,0,z)$ векторного произведения представляются в виде определителей, составленных из координат векторов, значение $|z|$ является положительным натуральным числом. По этой же причине площадь любого невырожденного треугольника с вершинами в узлах данной решетки оказывается не меньше $\dfrac{1}{2}$. По условию внутри параллелограмма или на его границе имеются другие узлы решетки. Если новый узел $\boldsymbol{E}$ находится внутри параллелограмма $\boldsymbol{ABCD}$, то этот параллелограмм распадается на 4 невырожденных треугольника $\boldsymbol{ABE}$, $\boldsymbol{BCE}$, $\boldsymbol{CDE}$, $\boldsymbol{DAE}$, площадь каждого из которых $\geqslant \dfrac{1}{2}$. Тогда $S \geqslant 4\cdot\dfrac{1}{2} = 2 > 1$. Если новый узел $\boldsymbol{E}$ находится на границе, то параллелограмм распадается на 3 невырожденных треугольника и $S \geqslant \dfrac{3}{2} > 1$. □

5. В кубе координаты четырех вершин, не лежащих в одной плоскости, целые. Доказать, что координаты всех вершин целые.

(Ивлева А. М.)

Доказательство. Будем называть вершину "целой", если все ее координаты являются целыми числами.

Поместим в начало координат одну из четырех целых вершин обозначим ее $\boldsymbol{O}$, не меняя направления осей координат. Тогда координаты остальных трех вершин останутся целыми.



Пусть $\boldsymbol{M_1}(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{M_2}(x_2,y_2,z_2)$, $\boldsymbol{M_3}(x_3,y_3,z_3)$. Тогда $\boldsymbol{A}(x_1+x_3,y_1+y_3,z_1+z_3)$, $\boldsymbol{B}(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$, $\boldsymbol{C}(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3,z_1+z_2+z_3)$, $\boldsymbol{D}(x_2+x_3,y_2+y_3,z_2+z_3)$.

Если четыре точки не лежат в одной плоскости, то векторы, проведенные из точки $\boldsymbol{O}$ в три остальных некомпланарны, в частности, ни один из них нельзя представить в виде суммы двух других. Поэтому, так как координаты вектора из точки $\boldsymbol{O}$ в другую точку равны координатам этой точки, задача сводится к следующей: среди чисел x_1, x_2, x_3, $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 + x_3$ три числа, ни одно из которых не равно сумме двух других, — целые. Доказать, что тогда и все числа целые. Необходимо перебрать несколько случаев.

1. x_1, x_2, x_3 — целые, тогда остальные числа, очевидно, целые;

2. x_1, x_2, $x_1 + x_3$ — целые, тогда x_3 — целое и далее очевидно;

3. x_1, x_2, $x_1 + x_2 + x_3$ — целые, тогда x_3 — целое, очевидно;

4. x_1, $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$ — целые, тогда x_2 и x_3 — целые, очевидно;

5. x_1, $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ — целые, тогда x_2 и x_3 — целые, очевидно;

6. x_1, $x_1 + x_2$, $x_1 + x_2 + x_3$ — целые, тогда x_3 и x_2 — целые, очевидно;

7. $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_2 + x_3$ — целые, тогда вычитая из второго числа третье, получаем, что $x_1 - x_2$ — целое, причем той же четности, что и $x_1 + x_2$. Тогда, складывая $x_1 - x_2$ и $x_1 + x_2$ получаем, что $2x_1$ — четное, следовательно x_1 — целое. Далее очевидно.

8. $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_1 + x_2 + x_3$ — целые. Тогда x_3 и x_2 — целые. Следовательно, x_1 — целое, и все очевидно.

Случаи, получающиеся из разобранных перестановкой x_1, x_2, x_3, рассматриваются аналогично. Для остальных двух координат также все аналогично. □

6. Дано векторное n-мерное пространство V. Доказать, что для любого набора из m $(m \leqslant n)$ линейно независимых векторов $v_1, v_2, \dots v_m$ и для любой матрицы A размерности $m \times n$, такой что $\operatorname{rank} A = m$ существует базис пространства V, в котором координаты вектора v_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ равны числам в i-ой строке матрицы A.

(Порошенко Е. Н.)

Доказательство. Дополним множество векторов $v_1, v_2, \dots, v_m$ до базиса $v_1, \dots, v_n$ пространства V. Добавим к матрице A снизу $n - m$ строк таким образом, чтобы полученная матрица B была невырождена. Это всегда можно сделать.

Действительно, приведем матрицу A к ступенчатому виду (полученную матрицу обозначим A'), затем добавим к A строки, в каждой из которых по одной единице, стоящей в одном из столбцов, где нет “углов” ступенек в матрице A', а все остальные элементы равны нулю. Обозначим эту матрицу B. Тогда, приведя к ступенчатому виду “подматрицу” A, матрицы B (то есть работая только с первыми m строками) и переставляя строки в полученной матрице, можно получить верхне-треугольную матрицу, на диагонали которой стоят отличные от нуля числа. То есть ранг полученной (и, следовательно, также и исходной) матрицы равен n.

Рассмотрим теперь базис $v_1, v_2, \dots, v_n$ и рассмотрим матрицу B^T в качестве матрицы перехода к другому базису. Отметим, что в базисе $v_1, v_2, \dots, v_n$ вектор v_i имеет вид $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, где единица стоит на i-ой позиции.

Тогда в новом базисе координаты вектора v_i, очевидно, будут совпадать с числами в i-ом столбце матрицы B^T, то есть с числами в i-ой строке матрицы B.

Отметим, что чтобы найти искомый базис, достаточно выразить векторы искомого базиса $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в виде

$$\begin{array}{ccccccccc} e_1 & = & \beta_{1,1}v_1 & + & \beta_{1,2}v_2 & + & \dots & + & \beta_{1,n}v_n \\ e_2 & = & \beta_{2,1}v_1 & + & \beta_{2,2}v_2 & + & \dots & + & \beta_{2,n}v_n \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ e_2 & = & \beta_{n,1}v_1 & + & \beta_{n,2}v_2 & + & \dots & + & \beta_{n,n}v_n \end{array},$$

где

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,n} \end{pmatrix} = ((B^T)^{-1})^T = B^{-1}.$$

□