16 декабря 2011 г.

II Олимпиада НГТУ по линейной алгебре и аналитической геометрии

Решения

1. Найти хотя бы одну матрицу A, такую что

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & & & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \dots\dots\dots & & 1 & 0 \\ n & n-1 & n-2 & \dots\dots\dots & & 1 \end{pmatrix}.$$

(Судоплатов С. В.)

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots\dots\dots & & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots\dots & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots & & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2. Концы отрезка находятся в точках $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 0, 1)$. Пересекает ли этот отрезок плоскость $2x + y - z + 1 = 0$? Если да, то каково отношение частей, на которые эта плоскость делит отрезок?

(Корюкин А. Н.)

Решение. Подставим в уравнение плоскости координаты точек. Получим: $2 \cdot 1 + 2 - 0 + 1 = 5 > 0$, $2 \cdot (-1) + 0 - 1 + 1 = -2 < 0$. Так что точки лежат по разные стороны плоскости. Плоскость пересекает отрезок. $\frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$ — отношение отклонений. Значит, одна часть отрезка длиннее другой в $\frac{5}{2}$ раз. □

3. Дано n-мерное векторное пространство V с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Пусть вектор

$$v = \lambda_1 \odot e_1 \oplus \lambda_2 \odot e_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \odot e_n \tag{1}$$

таков, что $\lambda_n \neq 0$. Доказать, что векторы $e_1, e_2, \ldots e_{n-1}, v$ образуют базис векторного пространства V.

(Порошенко Е. Н.)

Доказательство. Так как $\dim V = n$, любые n линейно независимых векторов образуют базис. Таким образом, достаточно доказать, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, v$ линейно независимы. Пусть эти векторы линейно зависимы, тогда рассмотрим их линейную комбинацию $\beta_1 \odot e_1 \oplus \beta_2 \odot e_2 \oplus \cdots \oplus \beta_{n-1} \odot e_{n-1} \oplus \gamma \odot v$, равную нулевому вектору и такую что не все ее коэффициенты равны нулю. В этом случае $\gamma \neq 0$. Действительно, в противном случае получаем $\beta_1 \odot e_1 \oplus \beta_2 \odot e_2 \oplus \cdots \oplus \beta_{n-1} \odot e_{n-1} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — это нулевой вектор. Так как векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ линейно независимы по условию, получаем $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1} = 0$, что противоречит выбору линейной комбинации. Следовательно,

$$v = \left(-\frac{\beta_1}{\gamma}\right) \odot e_1 \oplus \left(-\frac{\beta_2}{\gamma}\right) \odot e_2 \oplus \cdots \oplus \left(-\frac{\beta_{n-1}}{\gamma}\right) \odot e_{n-1} \tag{2}$$

Таким образом, получили представление вектора v в виде линейной комбинации базисных векторов, причем это представление отлично от представления (1), так как в (1) коэффициент при e_n отличен от нуля. Вычитая из равенства (1) равенство (2), получаем линейную комбинацию векторов $e_1, e_2, \ldots e_n$, равную нулю в которой не все коэффициенты равны нулю (в частности, не равен нулю коэффициент при e_n). Следовательно, векторы $e_1, e_2, \ldots e_n$ линейно зависимы, противоречие. □

4. Для заданных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ указать критерий разрешимости уравнения $\overline{a} \times \overline{x} = \overline{b}$. Найти общее решение этого уравнения.

(Чехонадских А. В.)

Решение. По определению, если $\overline{a} \times \overline{x} = \overline{b}$, то $\overline{a} \perp \overline{b}$. Если это условие выполнено, то зададим декартов базис такой, чтобы $\overline{a} = |\overline{a}|\overline{\imath}$, $\overline{b} = |\overline{b}|\overline{k}$. Поскольку $\overline{\imath} \times \overline{\jmath} = \overline{k}$, а $\overline{\jmath} = [k, i]$, исходное уравнение может быть переписано в виде $|\overline{a}|(\overline{\imath} \times \overline{x}) = |\overline{b}|\overline{k}$ и частным решением будет $\overline{x}_0 = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{\jmath} = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\dfrac{(\overline{b} \times \overline{a})}{|\overline{b}||\overline{a}|} = \dfrac{\overline{b} \times \overline{a}}{|\overline{a}|^2}$. Таким образом, условие $\overline{a} \perp \overline{b}$ также достаточное.

Пусть $\overline{x}_1$ — любое другое решение. Тогда представим $\overline{x}_1$ в виде $\overline{x}_1 = \overline{x}_0 + \overline{y}$. Имеем $\overline{a} \times \overline{x_1} = \overline{a} \times (\overline{x}_0 + \overline{y}) = \overline{a} \times \overline{x}_0 + \overline{a} \times \overline{y} = \overline{b} + (\overline{a} \times \overline{y})$. Следовательно, $\overline{a} \times \overline{y} = \overline{0}$, что возможно в том и только том случае, когда $\overline{y} \parallel \overline{a}$. Отсюда получаем, что любое решение отличается от $\overline{x}_0$ на вектор $\alpha\overline{a}$. В итоге, $\overline{x} = \dfrac{\overline{b} \times \overline{a}}{|\overline{a}|^2} + \alpha\overline{a}$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. □

5. Могут ли все шесть слагаемых в определителе третьего порядка иметь одинаковые знаки?

(Тимошенко Е. И.)

Решение. Каждое слагаемое является произведением трех элементов матрицы, взятым со знаком “+” или “−”. Так как каждый элемент матрицы содержится в двух слагаемых определителя, произведение всех шести произведений троек элементов матрицы равно квадрату произведения всех элеметов матрицы, то есть не меньше нуля. А с учетом того, что при вычислении определителя три произведения из шести произведений умножаются на -1), произведение всех слагаемых определителя не больше 0. Однако, если все шесть слагаемых одного знака, то их произведение больше нуля, противоречие. Следовательно, все шесть слагаемых определителя не могут быть одного знака. $\square$

6. На вход автомата подаётся двумерный вектор, а затем каждую секунду автомат преобразует текущий вектор с координатами (x, y) в вектор с координатами $(x^2 - y^2, 2xy)$. После минуты работы автомат получил исходный вектор. Найдите все возможные значения исходного вектора.

(Попков Р. А.)

Решение. Рассмотрим вектор (x, y) как комплексное число $z = x+iy$. Тогда каждую секунду автомат преобразует z в $z^2 = (x^2-y^2)+2ixy$. Через минуту автомат получит $z^{2^{60}}$. Из уравнения $z^{2^{60}} = z$ получаем, что $z = 0$ или $z^{2^{60}-1} = 1$. Корнями последнего являются числа вида $\cos\left(\frac{2\pi k}{2^{60}-1}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{2^{60}-1}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, 2^{60} - 2$. Итого, вектор $(0, 0)$ и векторы вида $\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{2^{60}-1}\right), \sin\left(\frac{2\pi k}{2^{60}-1}\right)\right)$, $k = 0, 1, \ldots, 2^{60} - 2$. $\square$