15 декабря 2010 г.

Олимпиада НГТУ по линейной алгебре и аналитической геометрии

Решения

1. Владимир Путин загадывает вектор $\overline{u}$ трехмерного векторного пространства с двухзначными положительными целочисленными координатами (в некотором декартовом базисе). Дмитрий Медведев называет ему координаты (в том же базисе) некоторого вектора $\overline{v}$, после чего Путин сообщает Медведеву значение скалярного произведения $\overline{u}\,\overline{v}$. Медведев должен отгадать задуманный вектор (назвать его координаты). Сможет ли он это сделать?

Решение. Медведеву достаточно назвать вектор $(10000, 100, 1)$. В этом случае Путин назовет ему шестизначное число, первые две цифры которого образуют первое число, следующие две цифры — второе число и, наконец, последние две цифры — третье. $\square$

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0(1, -2, 3)$ и пересекающей прямые $l_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$ и $l_2 : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z}{3}$.

Решение. Рассмотрим точки $\boldsymbol{M}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{M}_2(x_2, y_2, z_2)$, принадлежащие прямым l_1 и l_2 соответственно и такие, что $\boldsymbol{M}_0$ $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ лежат на искомой прямой l. Из принадлежности точки $\boldsymbol{M}_1$ прямой получаем

$$x_1 = 2t, \quad y_1 = -2t - 1, \quad z_1 = t + 2$$

для некоторого t, то есть $\overline{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_1} = (2t - 1, -2t + 1, t - 1)$. Из коллинеарности векторов $\overline{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_1}$ и $\overline{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_2}$ следует равенство $\overline{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_2} = s \cdot \overline{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_1}$ для некоторого s или $\overline{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_2} = (s(2t - 1), s(-2t + 1), s(t - 1))$ то есть

$$x_2 = s(2t - 1) + 1, \quad y_2 = s(-2t + 1) - 2, \quad z_2 = s(t - 1) + 3.$$

Так как $\boldsymbol{M}_2 \in l_2$ имеем $\dfrac{s(2t-1)+1}{4} = \dfrac{s(-2t+1)}{0} = \dfrac{s(t-1)+3}{3}$, откуда получаем

$$\begin{cases} s - 2st & = & 0 \\ \dfrac{2st - s + 1}{4} & = & \dfrac{st - s + 3}{3} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} s - 2st & = & 0 \\ \dfrac{1}{4} & = & \dfrac{st - s + 3}{3} \end{cases}.$$

Итак, получаем систему

$$\begin{cases} 4st & - & 4s & = -9 \\ 2st & - & s & = 0 \end{cases},\ ,$$

решая которую (например, сделав замену переменных $st = u$), находим $t = \dfrac{1}{2}$, и $s = \dfrac{9}{2}$. Значит, $\boldsymbol{M_1} = \left(1, -2, \dfrac{5}{2}\right)$ и, следовательно $l:\ \dfrac{x-1}{1-1} = \dfrac{y+2}{-2+2} = \dfrac{z-3}{\frac{5}{2}-3}$ или $l:\ \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$. □

3. Найти определитель девятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Докажем по индукции, что определитель матрицы n-го порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

равен $n+1$. При $n = 1$ имеем $|A_2| = |2| = 2$, при $n = 2$ получаем $|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

Предположим, что для порядков до $n \geqslant 2$ включительно утверждение доказано, и рассмотрим определитель порядка $n+1$. Разложением по первому столбцу получаем $|A_{n+1}| = 2(-1)^{1+1}|A_n| + (-1)^{2+1}|A_{n-1}| = 2(n+1) - n = n+2$. Следовательно, при $n = 9$ определитель равен 10. □

4. В неоднородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

столбец свободных членов является решением. Доказать, что векторы
$\overline{a}_1 = (a_{11} - 1, a_{12}, a_{13})$, $\overline{a}_2 = (a_{21}, a_{22} - 1, a_{23})$, $\overline{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{13} - 1)$ компланарны.

Доказательство. Перепишем систему в векторной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Из условия задачи следует, что $AB = B$, то есть $AB - B = \mathbb{O}$, следовательно $(A - E)B = \mathbb{O}$. Так как система неоднородна, вектор B ненулевой, а значит

$$|A - E| = 0. \tag{1}$$

С другой стороны, определитель матрицы третьего порядка можно рассматривать, как смешанное произведение векторов, координатами которых являются строки этой матрицы. Так как

$$A - E = \begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 \end{pmatrix},$$

имеем

$$|A - E| = \overline{a}_1\overline{a}_2\overline{a}_3. \tag{2}$$

Из (1) и (2) и следует компланарность векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ и $\overline{a}_3$. □

5. Доказать, что при любом натуральном числе n многочлен $x^{3n} + x^{n+3} - x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

Доказательство. Если a — корень многочлена $x^2 + x + 1$, то $a^3 = 1$ (так как $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$). Поэтому $a^{3n} + a^{n+3} - a^n - 1 = 1 + a^n - a^n - 1 = 0$. Следовательно, многочлен $x^{3n} + x^{n+3} - x^n - 1$ делится на двучлены $x - \xi$ и $x - \xi^2$, где $\xi = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ — корень третьей степени из 1, а значит этот многочлен делится и на $(x - \xi)(x - \xi^2) = x^2 + x + 1$. □

6. В пространстве задан некоторый ненулевой вектор $\overline{v}$ и еще множество из 2010 векторов. Двое по очереди выбирают по одному вектору из этого множества до тех пор, пока все векторы не будут разобраны. После этого каждый из двух игроков вычисляет сумму векторных произведений вектора $\overline{v}$ на выбранные им векторы. Побеждает тот, у кого эта сумма будет иметь большую длину. Существует ли беспроигрышная стратегия для кого-либо из игроков?

Решение. Пусть $S = \{\overline{s}_1, \overline{s}_2, \ldots, \overline{s}_{2010}\}$ — исходное множество векторов. Без ограничения общности можно полагать, что каждый игрок вместо вектора $\overline{s}$ выбирает вектор $\overline{u} = \overline{v} \times \overline{s}$. Рассмотрим множество $U = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_{2010}\}$, где $\overline{u}_i = \overline{v} \times \overline{s}_i$ для $i = 1, 2, \ldots, 2010$. Положим $\overline{a} = \sum\limits_{i=1}^{2010} \overline{u}_i$.

Если $\overline{a} \neq \overline{0}$, то введем декартову систему координат, направив ось Ox вдоль вектора $\overline{a}$, а оси Oy и Oz произвольным образом. Тогда $\overline{a} = \lambda\overline{\imath}$ в этой системе координат. Очевидно, что сумма векторов, полученных первым и вторым игроками в конце игры равна $\overline{a}$.

Первый игрок не проиграет, если будет каждый раз выбирать вектор $\overline{u} \in U$ с наибольшей абсциссой среди всех еще не выбранных к этому моменту векторов. Действительно, в этом случае, если в конце игры первый игрок получил вектор $\overline{b}_1 = \alpha\overline{\imath} + \beta\overline{\jmath} + \gamma\overline{k}$, то у второго игрока получится вектор $\overline{b}_2 = (\lambda - \alpha)\overline{\imath} - \beta\overline{\jmath} - \gamma\overline{k}$, причем из процедуры выбора следует, что $\alpha \geqslant \lambda - \alpha$. А так как $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$, $|\alpha| \geqslant |\lambda - \alpha|$. Следовательно, $|\bar{b}_1| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \geqslant \sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2 + \gamma^2} = |\bar{b}_2|$. Таким образом, первый игрок имеет стратегию, позволяющую ему не проиграть.

Если $\overline{a} = 0$, то в конце игры векторы, полученные первым и вторым игроками будут противоположны, а значит будут иметь одну и ту же длину. Следовательно, в этом случае результатом игры будет ничья, причем исход абсолютно не зависит от того, кто какие векторы выбирал. $\square$